به نام خدا

**ریاضی عمومی ۱**
پاییز ۹۵-۹۴

**دانشکده علوم ریاضی**
**دانشگاه صنعتی شریف**

**فصل سوم-قاعده زنجیره‌ای**

# ۱ قاعده زنجیره‌ای

قاعده زنجیره‌ای در واقع بیان مشتق‌پذیری و محاسبه مشتقِ ترکیب دو تابع مشتق‌پذیر است.

**قضیه ۱.** فرض کنید $f : S \to \mathbb{R}$ و $g : T \to \mathbb{R}$ دو تابع، $a$ نقطه‌ای درونی از $S$ و $f(a)$ نقطه‌ای درونی از $T$ باشد. اگر $f$ در نقطه $a$ و $g$ در نقطه $f(a)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $g \circ f$ در نقطه $a$ مشتق‌پذیر است و

$$(g \circ f)'(a) = g'\left(f(a)\right) f'(a).$$

برای اثبات قاعده زنجیره‌ای از گزاره زیر استفاده می‌کنیم که در آخر بخش ۱ فصل ۳ کتاب آمده است. اثبات آن را اینجا بررسی نمی‌کنیم؛ به منظور دیدن اثبات آن می‌توانید به کتاب مراجعه کنید.

**گزاره ۲.** فرض کنید تابع $f : S \to \mathbb{R}$ داده شده باشد و $a$ نقطه‌ای درونی از $S$ باشد. در این صورت، $f$ در نقطه $a$ مشتق‌پذیر است، اگر و فقط اگر عددی حقیقی مانند $m$ و تابعی مانند $\rho$ وجود داشته باشد که روی بازه‌ای محذوف حول ۰ تعریف شده است و

$$\lim_{h\to 0} \rho(h) = 0,\ f(a+h) - (f(a) + mh) = h\rho(h).$$

در این صورت، عدد حقیقی $m$ همان $f'(a)$ است.

**فعالیت ۱** (اثبات قضیه قاعده زنجیره‌ای)**.**

الف) می‌دانیم که دامنه تعریف $g \circ f$ مجموعه $S' = \{x \in S : f(x) \in T\}$ است. نشان دهید که $a$ نقطه‌ای درونی از $S'$ است.

ب) از گزاره ۲ می‌دانیم که تابع $\rho$ روی بازه‌ای محذوف حول ۰ یافت می‌شود که

$$f(a+h) - f(a) - f'(a)h = h\rho(h).$$

همچنین تابع $\sigma$ روی بازه‌ای محذوف حول ۰ یافت می‌شود که

$$g(b+k) - g(b) - g'(b)k = k\sigma(k),$$

که در آن $b = f(a)$. قرار دهید $k = f(a+h) - f(a)$ و قضیه را نتیجه بگیرید.

# ۲ نمادگذاری لایب‌نیتس

اگر تابع $f : S \to \mathbb{R}$ را به صورت $y = f(x)$ بنویسیم، آنگاه می‌توان مشتق را به صورت آهنگ تغییرات لحظه‌ای $y$ نسبت به متغیر $x$ در نقطه $a$ نوشت. در واقع از تعریف داریم

$$f'(x_\circ) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

با توجه به تعریف، مشتق $f$ در نقطه $a$ را می‌توان با $\frac{dy}{dx}(a)$ نیز نمایش داد. به عبارت دیگر آهنگ تغییرات لحظه‌ای $y$ نسبت به $x$ به اندازه مقدار مشتق است و می‌توان نوشت:

$$dy = f' \cdot dx.$$

حال اگر $y = f(x)$ و $z = g(y)$ در نظر بگیریم، آنگاه قاعده زنجیره‌ای در این نمادگذاری جدید به صورت زیر نوشته می‌شود:

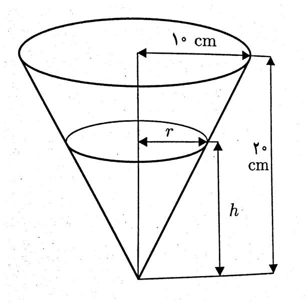
$$\frac{dz}{dx}(a) = \frac{dz}{dy}\left(f(a)\right) \cdot \frac{dy}{dx}(a)$$

که به اختصار چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

با این نمادگذاری جدید معمولا می‌توان حل مسائل را راحت‌تر نوشت. در ادامه مثالی را بررسی می‌کنیم.

**فعالیت ۲.** ظرفی قیفی شکل به ارتفاع ۲۰ و شعاع قاعده ۱۰ سانتی‌متر طوری قرار گرفته که رأس آن در پایین است و محور قیف در راستای قائم قرار دارد (شکل ۱). فرض کنید آب با سرعت ۲ سانتی‌متر مکعب بر ثانیه در این ظرف ریخته شود. آهنگ افزایش ارتفاع آب را وقتی ارتفاع آب ۶ سانتی‌متر است بدست آورید.




شکل ۱

# ۳ مشتق تابع وارون

**قضیه ۳.** فرض کنید $I$ یک بازه و $f:I\to\mathbb{R}$ تابعی باشد که در نقاط درونی $I$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن همه‌جا مثبت یا همه‌جا منفی است. در این صورت، تابع وارون $f$، یعنی $f^{-1}$، نیز در همه نقاط درونی دامنه تعریفش مشتق‌پذیر است و به ازای هر نقطه درونی از دامنه $f^{-1}$ مانند $b$ که $b=f(a)$،

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}.$$

**توجه.** اگر مشتق‌پذیری $f^{-1}$ را می‌دانستیم با مشتق گرفتن از $f^{-1}\circ f(x)=x$ طبق قاعده زنجیره‌ای، قضیه اثبات شده بود. آنچه که در قضیه مهم است اثبات مشتق‌پذیر بودن $f^{-1}$ است. در حین اثبات، فرمول مشتق نیز بدست می‌آید.

**فعالیت ۳.**

الف) با استفاده از قضیه مقدار میانگین، نشان دهید که اگر مشتق همه جا مثبت (منفی) باشد، تابع صعودی اکید (نزولی اکید) است.

ب) تعریف مشتق $f^{-1}$ را برای نقطه درونی $b$ از دامنه تعریف $f^{-1}$ بنویسید و مقدار آن را بدست آورید.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)}{h}=?$$

**راهنمایی:** از آنجا که $b$ نقطه درونی دامنه تابع وارون است، پس $a$ که $b=f(a)$ نیز نقطه درونی دامنه تعریف $f$ است. پس برای $h$ به اندازه کافی کوچک و مثبت، $k$ ای مثبت یافت می‌شود که $b+h=f(a+k)$.

**فعالیت ۴.**

الف) برای هر عدد گویا مانند $p$، تابع $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x)=x^p$ در نظر بگیرید. نشان دهید $f'(x)=px^{p-1}$.

ب) مشتق توابع وارون مثلثاتی، $\sin^{-1}$، $\cos^{-1}$ و $\tan^{-1}$ را محاسبه کنید.